大学入学共通テストに挑む 数学Ⅱ・B

プレテスト問題（一部抜粋）

第2問（必答問題）（配点 30）

〔1〕 100 g ずつ袋詰めされている食品 A と B がある。1 袋あたりのエネルギーは食品 A が 200 kcal，食品 B が 300 kcal であり，1 袋あたりの脂質の含有量は食品 A が 4 g，食品 B が 2 g である。

(1) 太郎さんは，食品 A と B を食べるにあたり，エネルギーは 1500 kcal 以下に，脂質は 16 g 以下に抑えたいと考えている。食べる量(g)の合計が最も多くなるのは，食品 A と B をどのような量の組合せで食べるときかを調べよう。ただし，一方のみを食べる場合も含めて考えるものとする。

(i) 食品 A を x 袋分，食品 B を y 袋分だけ食べるとする。このとき，x，y は次の条件①，②を満たす必要がある。

摂取するエネルギー量についての条件 [ア] ……… ①
摂取する脂質の量についての条件 [イ] ……… ②

[ア]，[イ] に当てはまる式を，次の各解答群のうちから一つずつ選べ。

[ア] の解答群

⓪ $200x + 300y \leqq 1500$　① $200x + 300y \geqq 1500$
② $300x + 200y \leqq 1500$　③ $300x + 200y \geqq 1500$

[イ] の解答群

⓪ $2x + 4y \leqq 16$　① $2x + 4y \geqq 16$
② $4x + 2y \leqq 16$　③ $4x + 2y \geqq 16$

(ii) x，y の値と条件①，②の関係について正しいものを，次の⓪〜③のうちから二つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。[ウ]，[エ]

⓪ $(x, y) = (0, 5)$ は条件①を満たさないが，条件②は満たす。
① $(x, y) = (5, 0)$ は条件①を満たすが，条件②は満たさない。
② $(x, y) = (4, 1)$ は条件①も条件②も満たさない。
③ $(x, y) = (3, 2)$ は条件①と条件②をともに満たす。

(iii) 条件①，②をともに満たす (x, y) について，食品 A と B を食べる量の合計の最大値を二つの場合で考えてみよう。

食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられるような食品のとき，すなわち x，y のとり得る値が実数の場合，食べる量の合計の最大値は [オカキ] g である。このときの (x, y) の組は，

$$(x, y) = \left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}, \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\right)$$ である。

次に，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられないような食品のとき，すなわち x，y のとり得る値が整数の場合，食べる量の合計の最大値は [シスセ] g である。このときの (x, y) の組は [ソ] 通りある。

(2) 花子さんは，食品 A と B を合計 600 g 以上食べて，エネルギーは 1500 kcal 以下にしたい。脂質を最も少なくできるのは，食品 A，B が 1 袋を小分けにして食べられない食品の場合，A を [タ] 袋，B を [チ] 袋食べるときで，そのときの脂質は [ツテ] g である。

身近な事象を数学的に捉えて表現

鶴迫 貴司
東山高校教諭（京都市）

■ 平成30年度プレテストについて

第2回試行調査の中から数学Ⅱ・Bの第2問を取り上げる。問い方の特徴を把握し、普段の授業にも生かせることを他分野（三角関数）で考察したい。

〔1〕は線形計画法と呼ばれる内容である。問題文を読解することから始まるのが新テストの特徴の一つ。この問題は長くもなく、短くもないので、読みながら立式する必要がある。いわゆる知識・技能および表現力がファーストステップになっている。

解くためには、三つの量「食べる量」「エネルギー」「脂質」を同時に考えていかなければならない。次期学習指導要領の「解説」にも、そうした記述（二つ以上のものが動く）が各分野に存在し、試行調査においては他分野でも出題されている。軽視することはできない特徴といえる。

複数のものが動く（変数扱い）と難易度も上がるが、表などを用いて情報を整理し、それをアウトプットするという形で対応したい。また、立式した不等式を用いて条件を満たすような整数値や「量」を見いだす力〈判断力〉も必要とされている。

左の抜粋では省略しているが、〔2〕も教科書に記載されている内容であり、大局的には「変換」に関する出題である。順像法と逆像法がこの単元の要であることはいうまでもないが、今回はそれらが同時に出題されている。最後の設問は、オリンピックのマークが座標平面上で取り上げられ、軌跡の問題として出題されている。身近な題材を数学的な観点で解決していく力こそ、新テストで問いたい最大の特徴といえるだろう。

■ 提案授業

そもそも「数学」は、「数」を介して「学ぶ」ことであり、試行調査の問題作成方針や次期学習指導要領「解説」の内容いかんで、全般的なことが大きく変わることはないはずだ。ただし、これまでと問われ方が変化するため、数学的な内容に一歩踏み込めていない生徒には、要注意かもしれない。

試行調査では第2問のように、複数の正解を漏れなく選択しなければならなかったり、結果を先に与えておいて、それを形づくる元の方程式は何か、を検証することが問われた。また、それに加え、日常生活に関連、または存在する事象を数学的な観点で解決する力も同時に問われる可能性が高い。こうした設問は、既存の問題集や参考書にはあまり見受けられないために目新しく感じてしまいがちである。

だが、既に「解説」には以下のように具体的な事例が豊富に取り上げられている。これを踏まえ、三角関数の分野において日常生活型の問題を作問してみた。

〈「解説」から一部抜粋〉
- 40名のクラスから3名のクラス代表を選ぶ選挙を行うとき、最低何票入れば当選するか。
- 建造物や山、天体などを見込む角度や直接測定できない2点間の距離を求めること。
- 具体的な少数のデータを通して、散布図、相関係数、標準偏差、分散の意味なども理解すること。
- 指数・対数分野において、二つの数量の関係に着目する。例えば、バクテリアの増殖や放射性物質の崩壊、音の強さや星の明るさ、地震の規模を表す尺度。
- 三角関数分野においても、二つの数量の関係に着目する。例えば、観覧車に乗ってある高さ以上にいる時間を考える。回転の半径や速さを変えたときに、ある高さ以上にいる時間の長さの変化の考察。
- 半径が一定の球に内接する円柱の中で、体積が最大となる円柱の形状の考察。また内接する立体を円すいや正四角柱、正四角すいなどの別の立体に変化させる考察。また外側の球を半球や円すいに変えること。
- ハノイの塔や複利計算。

これを受け、三角関数の分野において「解説」を基に、日常生活型の問題を作問した。

問題

1周するのに T 分かかる半径 r（m）の円形をした観覧車がある。その観覧車のキャビン乗り場は地上0（m）にあり、キャビンが地上を出発してから t 分後の地上からの高さを y（m）とする。キャビンの動く速さは一定であるとして、次の問いに答えよ。

(1) y を r，t，T を用いて表すとき、該当するものをすべて選べ。

⓪ $y=2r\sin^2\frac{2\pi}{T}t$　① $y=2r\sin^2\frac{\pi}{T}t$
② $y=r\left(1-\sin\frac{2\pi}{T}t\right)$　③ $y=r\left(1-\cos\frac{2\pi}{T}t\right)$
④ $y=r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)+r$　⑤ $y=2r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\pi\right)+r$
⑥ $y=r\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\pi\right)+r$　⑦ $y=2r\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)+r$

(2) $T=24$，$r=75$ の観覧車においてキャビンに乗ってから8分経ったとき、地上から何mの高さにいるか答えよ。

(3) $T=24$，$r=60$ の観覧車においてキャビンに乗って1周するとき、地上から90m以上の高さにいるのは何分間か答えよ。

この分野を一通り学ぶことによって、三角関数の全般的な活用や表現を確認できるように配慮した。

下図のように、キャビン乗り場を原点（0，0）にとり、キャビンが地上を出発してから t 分後の地上からの高さ y（m）については、キャビンと観覧車の中心Cとのなす角を θ とするとき、

$$y=r\ (1-\cos\theta)$$

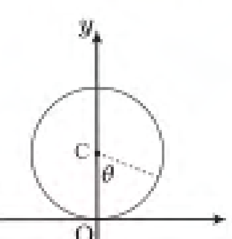
で与えられる。ただし、θ については条件から

$$\theta=\frac{2\pi}{T}t$$

であるので、上式は

$$y=r\left(1-\cos\frac{2\pi}{T}t\right)$$

と表すことができる。



この表し方は一つではない。このようなところに、表現力を養える機会と土台が存在するといえるのではないだろうか。

例えば、半角の公式を用いると、これは

$$y=2r\sin^2\frac{\pi}{T}t$$

と表せたり、三角関数の性質および加法定理などによって、

$$y=r\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)+r$$
$$y=r\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\pi\right)+r$$

などを導出することもできる。

(2)では、$y=r\left(1-\cos\frac{2\pi}{T}t\right)$ に条件の $T=24$，$r=75$ を用いると、

$$y=75\left(1-\cos\frac{\pi}{12}\cdot 8\right)=75\cdot\frac{3}{2}=112.5\ (\mathrm{m})$$

が得られる。これはある意味、三角関数を含む方程式の知識と技能の問題といえる。

また(3)では、条件 $T=24$，$r=60$ から、高さに関する不等式

$$90\leqq 60\left(1-\cos\frac{\pi}{12}t\right)$$

を立式して、t の取り得る値の範囲を定めていくことになる。

この問題では有名角が出るように数値設定をしたが、たとえ有名角が得られなくても「三角関数表」を用いれば、より深みのある問題にも着手することができるようになるのではないか。

以上のように「解説」を参考にして、三角関数を題材にした日常生活型の問題を考えたが、「解説」からはさまざまな題材が得られ、それから派生する問題が多々ある。

大学入学共通テストでは、上述した具体例だけで完結するようなことはあり得ないが、思考力・判断力・表現力をどのような場面で育むかについては(ア)日常生活に密着している事象・現象を数学的・数理的に捉える(イ)既習事項（定理や公式）を多面的に捉え、それを深化させる(ウ)ある命題に対して、「逆」が成り立つかどうかを洞察するなどを証明や論理性をもって、正しい方向に導いていく必要がある。

同時にその土台は、生徒自らが個人レベルで考えるということを優先することから始まる。正解・不正解にかかわらず、一方的ではなく、双方的なやりとりの中で、多面的・有機的な観点を互いに構築し養っていくことが何よりも大切といえる。