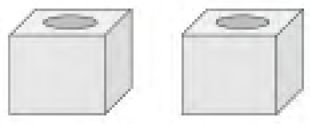
大学入学共通テストに挑む　数学Ⅰ・A

プレテスト問題（一部抜粋）

第３問



くじが100本ずつ入った二つの箱があり，それぞれの箱に入っている当たりくじの本数は異なる。これらの箱から二人の人が順にどちらかの箱を選んで１本ずつくじを引く。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

また，くじを引く人は，最初にそれぞれの箱に入れる当たりくじの本数は知っているが，それらがどちらの箱に入っているかはわからないものとする。

今，１番目の人が一方の箱からくじを１本引いたところ，当たりくじであったとする。２番目の人が当たりくじを引く確率を大きくするためには，１番目の人が引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきかを考察しよう。

最初に当たりくじが多く入っている方の箱をA，もう一方の箱をBとし，１番目の人がくじを引いた箱がAである事象をA，Bである事象をBとする。このとき，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$とする。また，１番目の人が当たりくじを引く事象をWとする。

太郎さんと花子さんは，箱A，箱Bに入っている当たりくじの本数によって，２番目の人が当たりくじを引く確率がどのようになるかを調べている。

(1)　箱Aには当たりくじが10本入っていて，箱Bには当たりくじが５本入っている場合を考える。

> 花子：１番目の人が当たりくじを引いたから，その箱が箱Aである可能性が高そうだね。その場合，箱Aには当たりくじが９本残っているから，２番目の人は，１番目の人と同じ箱からくじを引いた方がよさそうだよ。
> 太郎：確率を計算してみようよ。

（略）

> 太郎：今度は異なる箱から引く方が当たりくじを引く確率が大きくなったね。
> 花子：最初に当たりくじを引いた箱の方が箱Aである確率が大きいのに不思議だね。計算してみないと直観ではわからなかったな。
> 太郎：二つの箱に入っている当たりくじの本数の差が小さくなれば，最初に当たりくじを引いた箱がAである確率とBである確率の差も小さくなるよ。最初に当たりくじを引いた箱がBである場合は，もともと当たりくじが少ない上に前の人が１本引いてしまっているから当たりくじはなおさら引きにくいね。
> 花子：なるほどね。箱Aに入っている当たりくじの本数は10本として，箱Bに入っている当たりくじが何本であれば同じ箱から引く方がよいのかを調べてみよう。

(3)　箱Aに当たりくじが10本入っている場合，１番目の人が当たりくじを引いたとき，２番目の人が当たりくじを引く確率を大きくするためには，１番目の人が引いた箱と同じ箱，異なる箱のどちらを選ぶべきか。箱Bに入っている当たりくじの本数が４本，５本，６本，７本のそれぞれの場合において選ぶべき箱の組み合わせとして正しいものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。$\boxed{テ}$

	箱Bに入っている当たりくじの本数			
	４本	５本	６本	７本
⓪	同じ箱	同じ箱	同じ箱	同じ箱
①	同じ箱	同じ箱	同じ箱	異なる箱
②	同じ箱	同じ箱	異なる箱	異なる箱
③	同じ箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱
④	異なる箱	異なる箱	異なる箱	異なる箱

予想と比較で、対話的で深い学び

東京都立西高校主任教諭
村形　政信

■ 平成30年度試行調査について

従来のセンター試験では、公式を正しく理解し、効率よく計算を実行することが高得点を取るために必要であった。それに対し、大学入学共通テストでは試験時間が10分延長され70分になり、記述解答も導入される。数学的な思考・判断・表現力も評価の対象になる。もう少し詳しく述べるとすれば、次の四つの力が試されているのではないだろうか。

1　身の回りや社会的事象を数学の問題として表現する。
2　問題の本質的部分を抜き出し、求めるべきことを明確化する。
3　自分の持っている知識を使って、答えを導き出す。
4　出てきた答えを検証し、統合的、発展的に考える。

数学Ⅰ・A第３問は、まさにこの四つの力を、花子と太郎との２人の会話を通して評価しようとする問題構成になっていることがよく分かる。くじが100本ずつ入った二つの箱から順にどちらかの箱を選んでくじを引く。当たりくじの本数は決まっていない。まずは箱Aに当たりくじ10本、箱Bに当たりくじ５本が入っているということにして、話を進める。左記の１に相当する。次に、２番目の人は、１番目の人と同じ箱を引いた方がよいかという具体的な設定をして、条件付き確率の計算をする方向で話が進む。これは２に当たる。そして条件付き確率の定義に従って丁寧に計算を進める。計算自体はごく基本的なものである。３に相当する。最後に箱Aに入っている当たりくじの本数を固定し、箱Bの当たりくじの本数をいろいろ変えてみることで、何本であれば同じ箱から引いた方がよいか、発展的な考察がなされる。４に相当する。

■ 提案授業

授業の中で生徒がこれら四つの力を身に付けていくにはどうしたらよいだろうか。それには毎時間の授業で「主体的・対話的で深い学び」が実践されることを常に意識し、指導していくことだと考える。しかし、教えるべき内容は多く、授業時間は限られている。こうした現状の中でいつもグループワークをしたり、ディスカッションをしたりするのはなかなか難しい。大切なのは普段の授業の中でちょっとした工夫をすることで、主体的・対話的で深い学びは実現できるということである。

中央教育審議会答申の中にも、主体的・対話的で深い学びの実現に向け、教師がより一層の授業改善を行うことが求められる、とある。一方でこうした学習活動を行うに当たって今までとは別に新たな時間を設け、新たな取り組みをするのではなく、現在行っている学習活動を「主体的・対話的で深い学び」の視点から見直すことが大切であるとも述べている。

確率は身の回りの事象を数学の問題として扱いやすい分野である。ここでは、「数学A」確率の授業において、予想と比較を取り入れた、ちょっとした工夫を紹介する。主体的な学びには予想を、対話的な学びには比較を取り入れると効果的である。

例１　確率の導入で次のような問題を出し、二つの解答の式の違いを比較させる。「１個のサイコロを２回振るとき、出る目の数が１回目は３以下で、２回目は５以下である確率を求めよ」

一つ目の解答は、$\frac{3\times5}{6^2}=\frac{5}{12}$であり、二つ目の解答は$\frac{3}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$である。初めの解答は、起こり得る全ての場合の数が分母にきて、分子には考えている事象の場合の数がくる。つまり確率の定義式である。一方、二つ目の解答は、確率の積の法則を用いている。１回目の試行が２回目の試行に影響を及ぼさない。つまり二つの事象は独立である。

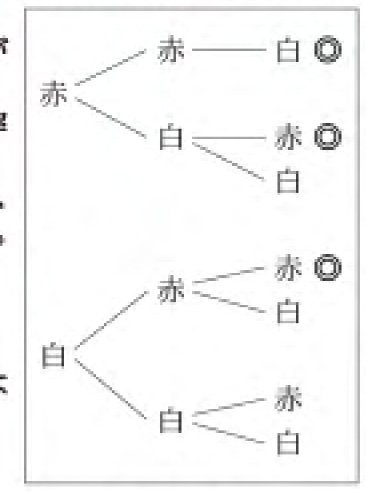
計算だけを見れば、単に$\frac{c\times d}{a\times b}$と$\frac{c}{a}\times\frac{d}{b}$の違いで、もちろん結果は同じである。しかし、確率を求める際には、二つの式には微妙な違いが生じる。この違いを比較させることで、生徒の対話的な学びを促す。

例２　次の問題において、次の二つの解答を比較させる。自分ならどちらの解答で計算するか発問する。「１から６までの数字がそれぞれ１つずつ書かれた６枚のカードがある。この中からもとに戻すことなく、２回カードを引く。１枚目は３以下で、２枚目は５以下である確率を求めよ」

初めの解答は、$\frac{3\times4}{6\times5}=\frac{2}{5}$である。二つ目の解答は$\frac{3}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$である。初めの解答は場合の数で考えた解答である。二つ目の解答は、１枚目が３以下であるのは６通り中３通りで、このとき２枚目が５以下であるのは５通り中４通りなので、積の法則から、解答のような式となった。

ところが、１枚目を選ぶ試行と２枚目を選ぶ試行は独立ではない。今の場合、１枚目に選ばれなかった他の５枚のカードの対等性がそのまま保存されるので、この解答が通用した。自分だったらどちらの解答を採用するかという比較によって、このように、どこが良い点か、良くない点か自分の言葉で説明する活動が生まれる。生徒の数学的な表現力を育てることにもつながる。

例３　「同様に確からしい」について学ぶ際に、以下の問題で考える。「白玉４個、赤玉２個が入っている袋から、玉を３個取り出すとき、白玉１個赤玉２個が出る確率を求めよ」



次の四つの解答を挙げて比較させ、どの解答が誤りか考えさせる。

解答①　玉を３個取り出したとき、(白、白、白)(赤、白、白)(赤、赤、白)のいずれかである。この中で題意を満たすのは、（赤、赤、白）の１通りなので、答えは$\frac{1}{3}$。

解答②　樹形図を書くと右図のようになる。従って、答えは$\frac{3}{7}$。

解答③
$$\frac{(4\times2\times1)+(2\times4\times1)+(2\times1\times4)}{6\times5\times4}=\frac{8+8+8}{6\times5\times4}=\frac{1}{5}$$

解答④　$\frac{{}_4C_1\times{}_2C_2}{{}_6C_3}=\frac{4\times1}{20}=\frac{1}{5}$

解答①と解答②は同様に確からしいが、保証されていないので誤りである。解答③と解答④はどちらも正しいが、解答③は元に戻すことなく３回取り出す場合で、解答④は同時に３個取り出す場合である。どちらの解答にしても、白玉４個、赤玉２個を区別して考えることにより、同様に確からしいことを保証しているのである。

例４　反復試行の確率で、次のような発問をし、生徒に予想させる。「３割打者が10打席中３回ヒットを打つ確率は？」。もちろん、答えは$\frac{3}{10}$でも１でもない。一見すると、日常の常識とは異なることを生徒に予想させることで、生徒は主体的に学ぼうとする。

また、次の発問はどうであろう。「３割打者が10回打席に入るとき、何回ヒットを打つ確率が最も高いか？」。二つの発問がどのように違うか比較させることで、対話的な学びを促すことができる。また予想させる授業展開にもなる。

日々の授業の中で、教科書の題材を基に、比較、予想という観点で、授業のちょっとした工夫を紹介した。比較が多くなってしまったが、これも工夫次第で予想を取り入れた授業になるはずだし、比較についても教師の発問の仕方で、それぞれの学校の生徒状況に応じた指導を行うことができる。教科書を教えるのではなく、教科書で教えるという考えの下、ちょっとした工夫の積み重ねで、生徒の主体的・対話的な深い学びを促すことは十分可能である。

なお、対話的な学びにはクラス内でのディスカッションのように他者との会話があるが、自問自答し、自分の中で考える、つまり自己との対話も対話的な学びである。比較という観点で対話的な学びが促されることを述べてきたが、比較させることでクラス内のディスカッションもできるし、発問の後に教師が数十秒の時間をつくることで、生徒は自分の中で考え、自己との対話が生まれる。授業の組み立て方によって、他者との対話、自己との対話を効果的に行えるようにしたい。また、こうした深い学びを日頃の授業の中で教師が心掛けることで、分析で述べた四つの力を生徒に身に付けさせていきたい。